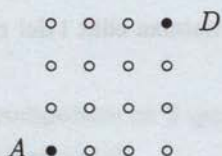


29E4. Demostreu que tot nombre primer p diferent de 2 i de 5 té infinits múltiples escrits només amb uns (és a dir, de la forma $111\dots 1$).

29E5. Es donen 16 punts que formen una quadrícula com a la figura:

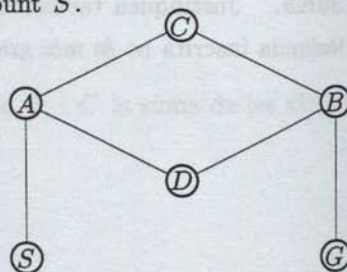


De tots ells, se n'han destacat dos: A i D . Es demana que fixeu, de totes les maneres possibles, dos altres punts B i C amb la condició que les 6 distàncies determinades pels quatre punts siguin totes diferents. En aquest conjunt de quaternes, s'ha d'estudiar:

- 1) Nombre de figures de 4 punts que existeixen amb les condicions de l'enunciat.
- 2) Figures que són geomètricament diferents, és a dir, no deduïbles una de l'altra per una transformació d'igualtat.
- 3) Si cada punt es designa per un parell d'enters (X_i, Y_i) , la suma $|X_i - X_j| + |Y_i - Y_j|$ estesa al sis parells AB, AC, AD, BC, BD, CD , és constant.

29E6. Una màquina de joc d'un casino té una pantalla on s'ofereix un esquema com el de la figura. En començar el joc apareix una bola al punt S .

A cada impuls del jugador, la bola es mou a cada un dels cercles immediats, amb la mateixa probabilitat per a cada un d'ells. La partida acaba quan té lloc per primera vegada un dels dos esdeveniments següents: (1) La bola torna a S , i el jugador perd. (2) La bola arriba a G , i llavors el jugador guanya. Es demana la probabilitat que el jugador guanyi, i la duració mitjana de les partides.



Primera sessió. 14 de Gener de 1994, de 16 h a 20 h.

30C1. Dues circumferències C_1 i C_2 es tallen en punts A i B . Es pren un punt M de C_1 , exterior a C_2 , i es tracen les rectes MA i MB . Anomenem A' i B' els punts (diferents de A i de B) en què aquestes rectes tallen respectivament la circumferència C_2 . Demostreu que la longitud del segment $A'B'$ no depèn de la posició de M .

30C2. Demostreu que la funció

$$f(x) = 2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

és constant en el conjunt dels nombres reals tals que $x \geq 1$.

30C3. El nombre 9687600 es pot escriure com a producte de nombres enters consecutius, un dels quals és primer. Calculeu quins són aquests factors.

30C4. En una bossa hi ha n boles numerades amb números de 1 a n .

a) Si traiem tres boles d'aquesta bossa, totes alhora, calculeu la probabilitat que no surti cap parella de números consecutius.

b) Si traiem m boles d'aquesta bossa, totes alhora, demostreu que la probabilitat que no surti cap parella de números consecutius és

$$\frac{\binom{n-m+1}{m}}{\binom{n}{m}}.$$

30C5. Digueu quina relació hi ha d'haver entre les arestes d'un tetràedre per tal que les seves cares siguin triangles semblants no tots iguals.

30C6. Una successió de terme general a_n compleix $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ per a $n > 2$. Se sap que la suma dels 1000 primers termes és 500, i que la suma dels 1000 següents és 2000. Calculeu la suma dels 1993 primers termes i el terme a_{1994} .

30C7. Sigui $P(x)$ un polinomi amb coeficients enters.

a) Comproveu que si m i n són nombres enters, llavors $P(m) - P(n)$ és divisible per $m - n$.

b) Demostreu que si hi ha tres nombres enters a , b i c tals que $P(a) = P(b) = P(c) = 2$, llavors $P(x) \neq 3$ per tot x enter.

30C8. Calculeu totes les arrels complexes de l'equació

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0.$$

Primera sessió. 25 de Febrer de 1994.

30E1. Demostreu que si entre els infinits termes d'una progressió aritmètica de nombres enters hi ha un quadrat perfecte, llavors infinits termes de la progressió són quadrats perfectes.

30E2. Sigui $O.XYZ$ un triedre trirectangle de vèrtex O i arestes X , Y i Z . Sobre l'aresta Z es fixa un punt C tal que $OC = c$. Sobre X i Y es consideren, respectivament, punts variables P i Q de manera que $OP + OQ$ sigui una constant donada k . Per a cada parell de punts P i Q , els quatre punts O , C , P i Q determinen una esfera, el centre de la qual W , es projecta sobre el pla OXY . Raoneu quin és el lloc geomètric d'aquesta projecció. Raoneu també quin és el lloc geomètric de W .

30E3. Una Oficina de Turisme vol fer una enquesta sobre el nombre de dies asolellats i de dies de pluja al llarg d'un any. Per tal de fer-ho, demana informació a sis regions, les quals li transmeten la informació de la taula següent:

Regió	Sol o pluja	Inclassificable
A	336	29
B	321	44
C	335	30
D	343	22
E	329	36
F	330	35

La persona encarregada de l'enquesta, que té dades més detallades, no és imparcial. S'adona que prescindint d'una de les regions, la observació dona un nombre de dies plujosos que és la tercera part del nombre de dies de sol. Digueu raonadament de quina regió ha de prescindir.

30E4. L'angle A d'un triangle isòscele ABC mesura $2/5$ de recte, i els angles B i C són iguals. La bisectriu de l'angle C talla el costat oposat al punt D . Calculeu les mesures dels angles del triangle BCD . Expressen la mesura a del costat BC en funció de la mesura b del costat AC , sense que a l'expressió hi aparegui cap raó trigonomètrica.

30E5. Amb 21 fitxes de dames, unes de blanques i unes de negres, es forma un rectangle 3×7 . Demostreu que sempre hi ha quatre fitxes del mateix color situades en els vèrtexs d'un rectangle.

30E6. Un polígon convex de n costats es descompon en m triangles amb interiors disjunts, de manera que cada costat d'aquests m triangles ho és també d'altre triangle contigu o del polígon donat. Demostreu que $m + n$ és parell. Coneguts m i n , trobeu el nombre de costats diferents que queden a l'interior del polígon i el nombre de vèrtexs diferents que queden en aquest interior.

Guanyadors: David Sevilla González, Tomás Baeza Oliva, Miguel Catalina Gallego, Alfonso Gracia Saz, Jerónimo Arenas García, Miguel A. Bermúdez Carro.

Primera sessió. 13 de Gener de 1995, de 16 h a 20 h.

31C1. Donat un triangle isòsceles de base 2 i altura 2, trobeu les paràboles tangents als costats iguals del triangle isòsceles tals que l'àrea que tanquin amb la base del triangle sigui màxima i mínima.

31C2. Sigui $N = abc_{(n)}$ un nombre escrit en el sistema de numeració de base n , on $0 \leq a, b, c \leq n-1$ i on a, b, c són diferents entre ells i de zero. Formeu els nombres en base n que s'obtenen permutant de totes les maneres possibles les xifres a, b, c . Demostreu que la suma d'aquests nombres és divisible per $111_{(n)}$. Generalitzeu l'enunciat del problema a nombres de p xifres escrits en base n .

31C3. Donat un triangle ABC i un punt M sobre AC , busqueu un punt N en un dels altres costats de manera que el segment MN divideixi el triangle en dues parts que tinguin la mateixa àrea.

31C4. Tenim dos daus perfectes normals. Volem canviar les puntuacions de cadascuna de les cares dels dos daus de manera que les probabilitats d'aconseguir els resultats 2 a 12, llançant-los simultàniament, sigui la mateixa que s'esdevindria usant els dos daus donats inicialment. A les noves puntuacions dels daus es permet la repetició d'una mateixa puntuació en dues cares, així com la utilització de puntuacions superiors al 6, però no s'accepta pas el 0. És possible de fer això?

Segona sessió. 14 de Gener de 1995, de 9 h a 13 h.

31C5. Siguin $[a, b]$ i $[c, d]$ dos intervals tancats de $\mathbb{R}$. Siguin $x_0, x_1, \dots, x_n, y_0, y_1, \dots, y_n$ nombres reals que compleixen

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d.$$

Proveu que si cadascun dels n^2 rectangles de $\mathbb{R}^2$: $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $(0 \leq i, j \leq n-1)$ té un costat de longitud entera, llavors el rectangle gran $[a, b] \times [c, d]$ també té un costat de longitud entera.

31C6. Siguin A , B i C els tres angles d'un triangle.

a) Demostreu que es compleix la igualtat

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.$$

b) Supposeu que tres arrels de l'equació polinòmica $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ són $\tan A$, $\tan B$ i $\tan C$, on A , B i C són els tres angles d'un triangle. Busqueu la quarta arrel en funció solament dels coeficients p , q , r , s del polinomi.

31C7. Busqueu una fórmula general que permeti conèixer còmodament les hores en les quals la busca horària d'un rellotge i la minutera formen un angle recte. Comproveu aquesta fórmula general per a les 3 i les 9 hores.

31C8. Sigui $ABCD$ un rectangle, dividim el costat AB en p parts iguals i el costat AD en q parts iguals, amb p , q enters senars, i considerem la quadrícula resultant.

a) Calculeu el nombre de camins de longitud mínima per la quadrícula que van del vèrtex A al seu vèrtex oposat C .

b) Cadascun d'aquests camins tanca amb els costats AB i BC una certa àrea. Calculeu la suma d'aquestes àrees.

c) Si m és la mitjana aritmètica d'aquestes àrees, es demana quants camins tanquen aquesta àrea m .

Guanyadors: Sergio Cabello Justo, Thomas Doumenc, Joaquim Puig Sadurní, Ferran Revilla Domingo, Ana de Mier Vinué.

Primera sessió. 24 de febrer de 1995, de 16 h a 20 h.

31E1. Es consideren conjunts A de cent nombres naturals diferents, que tinguin la propietat que si a, b, c són elements qualssevol (iguals o diferents) de A , existeix un triangle no obtusangle els costats del qual mesuren a, b i c unitats.

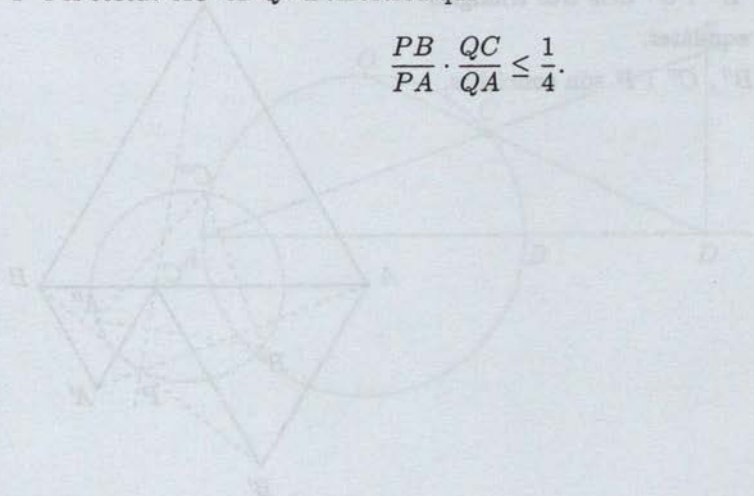
S'anomena $S(A)$ la suma dels perímetres considerats a la definició de A . Calculeu el valor mínim de $S(A)$.

31E2. Retallem diversos cercles de paper (no necessàriament iguals) i els estenem sobre una taula de manera que n'hi hagi alguns de superposats (amb part interior comuna), però de tal forma que no hi hagi cap cercle dins d'un altre.

Proveu que és impossible engalzar les peces que resulten de retallar les parts no superposades i compondre amb elles cercles disjunts.

31E3. Pel baricentre G d'un triangle ABC es traça una recta que talla el costat AB en P i el costat AC en Q . Demostreu que

$$\frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4}.$$



Segona sessió. 25 de febrer de 1995, de 10 h a 13 h.

31E4. Trobeu les solucions enteres de l'equació $p(x+y) = xy$ on p és un nombre primer.

31E5. Demostreu que en cas que les equacions

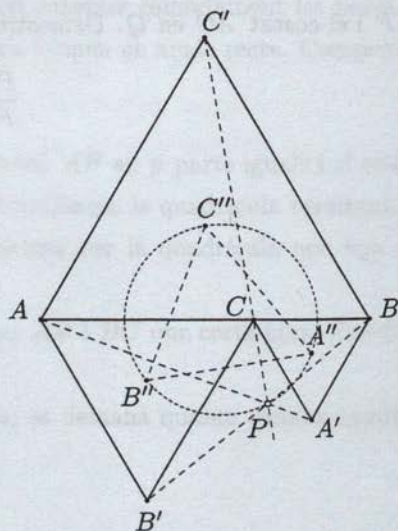
$$x^3 + mx - n = 0$$

$$nx^3 - 2m^2x^2 - 5mnx - 2m^3 - n^2 = 0$$

($n \neq 0$), tinguin una arrel comuna, la primera tindrà dues arrels iguals, i determineu llavors les arrels de les dues equacions en funció de n .

31E6. A la figura, AB és un segment fix i C un punt variable dins d'ell. Es construeixen triangles equilàters ACB' i CBA' de costats AC i CB en un mateix semiplà definit per AB , i un altre triangle equilàter ABC' de costat AB en el semiplà oposat. Demostreu:

- Les rectes AA' , BB' i CC' són concurrents.
- Si anomenem P el punt comú a les tres rectes del punt a), trobeu el lloc geomètric de P quan C varia en el segment AB .
- Els centres A'' , B'' i C'' dels tres triangles formen un triangle equilàter.
- Els punts A'' , B'' , C'' i P són concíclics.



Guanyadors: Àngel Paredes Galán, Jerónimo Arenas García, Luis Fabiani Bendicho, Jaume Andreu Pascual, Alejandro García Gil, Ignacio Fernández Galván.

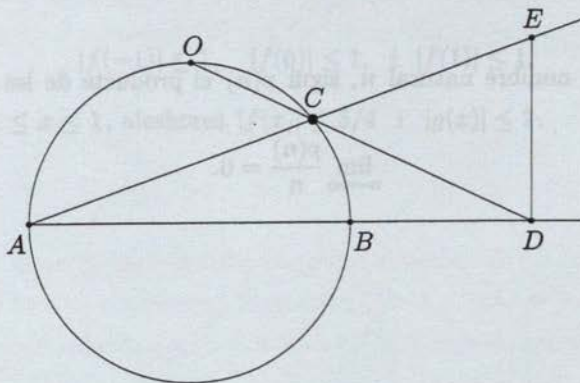
Primera sessió. 15 de Desembre de 1995, de 16 h a 20 h.

32C1. Un cert professor de matemàtiques va escriure a la pissarra un polinomi $f(x)$ amb coeficients enters i va dir: "Si al polinomi substituïm x per l'edat del meu fill, que acaba de fer a anys, obtenim la igualtat $f(a) = a$. A més, $f(0) = p$ és un nombre primer més gran que a ." Quants anys té el fill del professor?

32C2. Sigui n un nombre natural. Trobeu el nombre més gran k tal que en el conjunt $\{1, 2, \dots, n\}$ poguem agafar un subconjunt A de k nombres que compleixi que si x , y , z són nombres qualssevol de A , sempre sigui $x + y \neq z$.

32C3. Escollim un nombre natural n i demanem a r persones que escriguin un subconjunt de $\{1, 2, \dots, n\}$. Quina és la probabilitat que els r subconjunts obtinguts siguin disjunts dos a dos?

32C4. Sigui AB el diàmetre d'una circumferència, O el punt mig d'un dels arcs que van de A a B , i C un punt qualsevol de l'arc OB . Dibuixem les rectes AC , OC , i sigui D la intersecció de OC amb AB . Sigui DE perpendicular a AD i E la seva intersecció amb AC . Demostreu que els segments BD i DE tenen la mateixa longitud.



Segona sessió. 16 de Desembre de 1995, de 9 h a 13 h.

32C5. Calculeu un nombre de sis xifres sabent que passant-ne l'última al davant queda dividit per 3.

32C6. Calculeu el màxim comú divisor de

$$\binom{n}{k}, \binom{n+1}{k}, \dots, \binom{n+k}{k},$$

on n i k són nombres naturals, $n \geq k$.

32C7. Demostreu que si un polígon inscrit en una circumferència de radi r té costats de longituds $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$, es compleix

$$\ell_1^2 + \ell_2^2 + \dots + \ell_n^2 \leq 9r^2.$$

Determineu per quins polígons hi ha igualtat.

32C8. Donat un nombre natural n , sigui $p(n)$ el producte de les seves xifres. Demostreu que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n} = 0.$$

Guanyadors: Edgar Güeto de la Rosa, Raúl Martín Álvarez, Víctor Martínez de Albéniz Margalef, Sergi Elizalde Torrent, Joel Gabàs Masip, Lluís Tarafa Mate, Max Bernstein Obiols, Diego Pozo Tortosa.

Primera sessió. 22 de febrer de 1996, de 16 h a 20 h.

32E1. Els nombres naturals a i b són tals que

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$$

és un enter. Demostreu que el màxim comú divisor de a i b no és més gran que $\sqrt{a+b}$.

32E2. Sigui G el baricentre del triangle ABC . Demostreu que si

$$AB + GC = AC + GB,$$

llavors el triangle és isòsceles.

32E3. Siguin a , b , c tres nombres reals. Es consideren les funcions

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{i} \quad g(x) = cx^2 + bx + a.$$

Sabent que

$$|f(-1)| \leq 1, \quad |f(0)| \leq 1, \quad \text{i} \quad |f(1)| \leq 1,$$

proveu que si $-1 \leq x \leq 1$, aleshores $|f(x)| \leq 5/4$ i $|g(x)| \leq 2$.

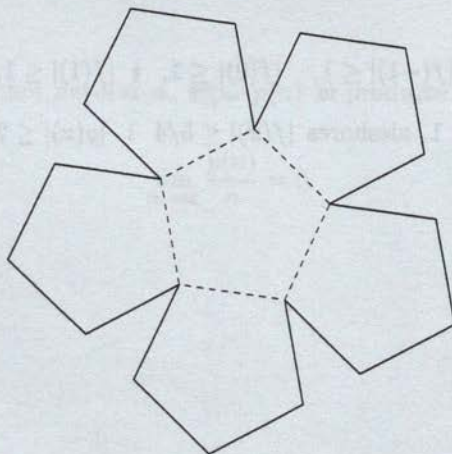
32E4. Discutiu l'existència de solucions reals x de l'equació

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$$

segons els valors reals del paràmetre p , i resoleu-la en els casos que tingui solució.

32E5. A *Port Aventura* hi ha 16 agents secrets. Cada un d'ells vigila algun dels seus col·legues. Se sap que si l'agent A vigila l'agent B , aleshores B no vigila A . Sabem també que 10 agents qualssevol poden ser numerats de manera que el primer vigila el segon, aquest vigila el tercer, ..., el desè vigila el primer. Demostreu que també es poden numerar d'aquesta manera 11 agents qualssevol.

32E6. La figura adjunta es compon de sis pentàgons regulars de costat un metre. Es doblega per la línia de punts fins que coincideixen les arestes no puntejades que es tallen en un vèrtex. Quin volum d'aigua hi cap, al recipient així format?



Guanyadors: Sergi Elizalde Torrent, Tomás Palacios Gutiérrez, Fernando Rambla Blanco, Antonio Jara de las Heras, Patricia Sebastián Celorrio, Víctor Martínez de Albéniz Margalef.

Primera sessió. 13 de Desembre de 1996, de 16 h a 20 h.

33C1. Amb dos filferros de 1996 cm de llarg cadascun, dos filferros de 1997 cm de llarg cadascun i dos filferros 1998 cm de llarg cadascun, es construeix un tetràedre de manera que les sis arestes resulten ser tangents a una esfera. Raoneu en quina posició relativa hem situat les arestes.

33C2. Un rellotger molt de la broma té a l'aparador de la seva botiga un rellotge amb les dues busques — la *minutera* i l'*horària* — exactament iguals. Una persona que s'hi fixi una mica, quasibé sempre pot deduir quina és la busca horària i quina la minutera, i deduir, doncs, quina hora és. Tanmateix, però, en alguns casos això no és possible. Si en aquests casos s'escull a l'atzar una busca con a horària i l'altra com a minutera, i l'elecció és incorrecta, es cometrà un error en la lectura de l'hora. La diferència més curta entre l'hora llegida i l'hora real no pot ser en cap cas superior a les 6 hores.

a) Descriuiu les situacions en què no es pot saber quina hora és.

b) Estudieu quin és el màxim error que es pot arribar a cometre i a quines hores es produeix aquest màxim error.

33C3. En una bossa hi ha n boles blanques numerades de 1 a n , n boles blaves numerades de 1 a n i n boles grogues numerades de 1 a n , essent $n \geq 4$. Es treuen 4 boles d'aquesta bossa totes alhora. Esudieu, segons els valors de n , quins dels esdeveniments següents és més difícil que es doni, és a dir, té una probabilitat més petita:

$A = \{\text{treure les quatre boles del mateix color}\}$

$B = \{\text{treure quatre boles amb números correlatius}\}$

$C = \{\text{treure tres boles d'un mateix número i l'altra no}\}.$

33C4. Sigui C un con recte de radi r i altura h . Sigui V el vèrtex del con i AB un diàmetre de la base circular de centre O . Els plans $\mathcal{P}$ paral·lels a la generatriu VA del con que tallen la base circular segons cordes MN perpendiculars a AB , tallen la superfície cònica segons una paràbola. Trobeu la distància d de la corda MN al centre O per tal que l'àrea de la intersecció de $\mathcal{P}$ amb C sigui màxima.

Segona sessió. 14 de Desembre de 1996, de 9 h a 13 h.

33C5. Al pla definim un sistema de coordenades rectangulars. Calculeu l'àrea del recinte solució del sistema d'inequacions següent:

$$\begin{cases} |\sqrt{3}y - x| \leq 2x \\ x^2 + y^2 \leq 2x. \end{cases}$$

33C6. Busqueu els nombres complexos α tals que els afixos dels nombres α , α^2 , α^3 , α^4 siguin els vèrtexs d'un trapezi.

33C7. Hi ha una fórmula que dona l'àrea A d'un triangle del pla que els vèrtexs situats en punts de coordenades enteres com a funció lineal $A = aI + bC + dV$, on I representa el nombre de punts de coordenades enteres que són interiors al triangle; C el nombre dels que queden situats sobre els costats del triangle; i $V = 3$ és el nombre de vèrtexs de coordenades enteres. Deduïu-la, a partir de l'anàlisi d'alguns exemples, i demostreu-la.

33C8. Anomenarem *polígon mixtilini* una regió tancada del pla limitada per *costats* que poden ser segments o arcs de circumferència. Els *angles* del polígon mixtilini es mesuren en graus i són, en cada vèrtex, els que determinen els costats (cas que siguin segments), o les tangents traçades pel vèrtex als costats que siguin arcs.

Els *costats* del polígon es mesuren també en graus, de la manera següent:

- 1) segments: 0° .
- 2) arcs amb la concavitat cap a l'interior del polígon: els graus que mesura l'arc, comptats positius.
- 3) arcs amb la concavitat cap a l'exterior del polígon: els graus que mesura l'arc, comptats negatius.

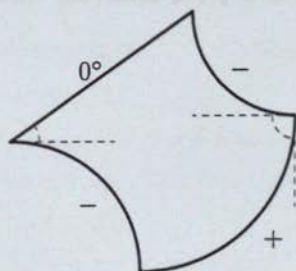
L'esquema il·lustra la manera de mesurar els costats i els angles d'un polígon mixtilini.

a) Demostreu que si en un polígon de n costats els angles són $A_1, A_2, \dots, A_n$ i els costats són $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, llavors es compleix

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + (n - 2) 180^\circ.$$

b) Demostreu que si els tres costats d'un *triangle* mixtilini tenen un punt en comú que no és un vèrtex, llavors $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

c) Si tenim un *angle* mixtilini A inscrit en una circumferència, calculeu A en funció dels costats α , β i γ del triangle que queda determinat a la circumferència.



Primera sessió. 7 de Març de 1997, de 16 h a 20 h.

33E1. Calculeu la suma dels quadrats dels cent primers termes d'una progressió aritmètica sabent que la suma de tots els termes val -1 , i la suma dels que ocupen el lloc parell val $+1$.

33E2. Un quadrat de costat 5 es divideix en 25 quadrats unitat per mitjà de rectes paral·leles als costats. Sigui A el conjunt dels 16 punts interiors, que són vèrtexs dels quadrats unitat, però que no estan en els costats del quadrat inicial.

Digueu quin és el més gran nombre de punts de A que es poden elegir de manera que tres qualssevol d'ells no siguin vèrtexs d'un triangle rectangle isòsceles.

33E3. Es consideren les paràboles $y = x^2 + px + q$ que tallen els eixos de coordenades en tres punts diferents, pels quals es fa passar una circumferència. Demostreu que totes les circumferències traçades en variar p i q a $\mathbb{R}$ passen per un punt fix, que cal determinar.

33E4. Sigui p un nombre primer. Determineu tots els enters $k \in \mathbb{Z}$ tals que $\sqrt{k^2 - pk}$ és un enter positiu.

33E5. Demostreu que en un quadrilàter convex d'àrea unitat, la suma de les longituds de tots els costats i diagonals no és menor que $2(2 + \sqrt{2})$.

33E6. Per fer una volta completa en un cotxe a un circuit circular, la quantitat exacta de benzina està distribuïda en dipòsits fixos situats en n punts diferents qualssevol del circuit. Inicialment el dipòsit del cotxe està buit. Demostreu que qualsevol que sigui la distribució del combustible als dipòsits, sempre existeix un punt de sortida de forma que es pugui fer una volta completa.

Aclariments:

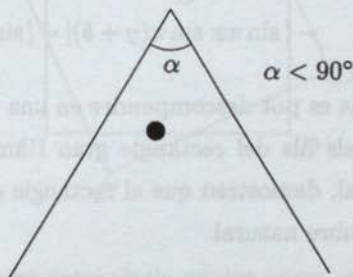
Se suposa que el consum és uniforme i proporcional a la distància.

El dipòsit del cotxe té capacitat suficient per tota la benzina.

Primera sessió. 12 de Desembre de 1997, de 16 h a 20 h.

34C1. Si $p(x)$ és un polinomi amb coeficients naturals del qual coneixem $p(1)$ i $p(p(1))$, com podem calcular els seus coeficients?

34C2. Tenim una bola en un billar defectuós amb una cantonada que fa un angle lleugerament inferior a 90° com a la figura. De quantes maneres podem llançar la bola (sense efecte) de forma que toqui les dues bandes i torni a la posició inicial? I si l'angle de la cantonada és superior a 90° ?



34C3. Siguin s i t nombres reals positius tals que $s < t$. Demostreu que hi ha exactament tres parelles de triangles S i T que compleixen:

- 1) S i T són semblants.
- 2) Les longituds dels costats de S i de T formen progressions aritmètiques de raons s i t , respectivament.
- 3) La longitud d'un costat de S és igual a la longitud d'un costat de T .

Comproveu també que el perímetre d'un dels tres triangles S així obtinguts és igual a la suma dels perímetres dels altres dos.

34C4. Sigui C la circumferència més gran que podem posar dins d'un quadrat Q . Comproveu que donat un nombre $\varepsilon > 0$ hi ha un nombre $r < \varepsilon$ tal que dins del quadrat podem posar-hi circumferències de radi r (que no es tallin però que poden ser tangents) de manera que la suma de les àrees d'aquests cercles sigui igual a l'àrea del cercle C .

34C5. Trobeu els nombres n que compleixen que la suma dels quadrats de n enters consecutius qualssevol sigui divisible per n . En particular, digueu quin és el més gran i el més petit d'aquests nombres que tenen dues xifres. (Es compleix que $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.)

34C6. • Demostreu que si el nombre a o el nombre b són naturals, llavors

$$0 = |\sin \pi(x+a) \sin \pi(y+b)| + |\sin \pi x \sin \pi y| - \\ - |\sin \pi x \sin \pi(y+b)| - |\sin \pi(x+a) \sin \pi y|.$$

• Si tenim un rectangle que es pot descompondre en una unió de rectangles més petits, tots ells de costats paral·lels als del rectangle gran i amb algun dels seus costats de longitud un nombre natural, demostreu que el rectangle gran també té algun dels seus costats de longitud un nombre natural.

34C7. Un tetràedre té les quatre cares que són triangles amb els costats en progressió aritmètica. La raó de la progressió aritmètica de dues cares és la mateixa. Digues com són aquests tetràedres.

34C8.

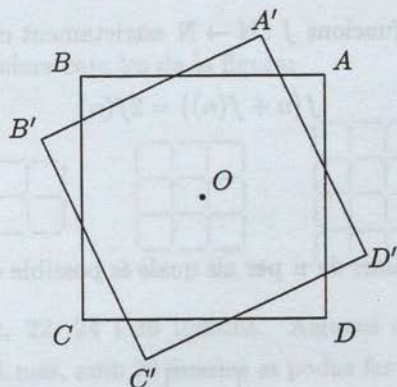
Resoleu la següent equació

$$\arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1) = \arctan 3x.$$

Guanyadors: Marc Martínez de Albéniz Margalef, Lluís Acero Sistach, Xavier Gratal Martínez, Edgar González Pellicer, Aniol Llorente Sagner, Àngel Faus Tomás, Eduard Viladesau Franquesa, Antoni Conejero Cárceles.

Primera sessió. 13 de Març de 1998, de 16 h a 20 h.

34E1. Un quadrat $ABCD$ de centre O i costat ℓ gira un angle α al voltant de O . Trobeu l'àrea comuna als dos quadrats.



34E2. Trobeu tots els nombres naturals de quatre xifres, escrits en base 10, que siguin iguals al cub de la suma de les seves xifres.

34E3. Es considera un triangle ABC i la circumferència circumscrita. Si D i E són punts sobre el costat BC tals que AD i AE són, respectivament, paral·leles a les tangents en C i B a la circumferència circumscrita, demostreu que

$$\frac{BE}{CD} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Segona sessió. 14 de Març de 1998, de 9 h a 13 h.

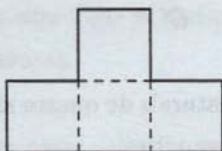
34E4. Trobeu les tangents dels angles d'un triangle sabent que són nombres enters positius.

34E5. Trobeu totes les funcions $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estrictament creixents i tals que

$$f(n + f(n)) = 2f(n)$$

per $n = 1, 2, 3, \dots$

34E6. Determineu els valors de n per als quals és possible construir un quadrat $n \times n$ engalant peces del tipus

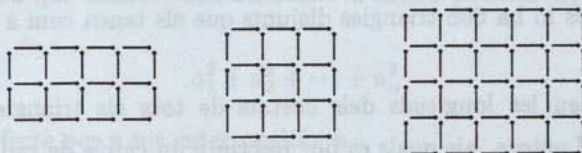


Guanyadors: Mario Andrés Montes García, Ramón José Aliaga Varea, David Martín Clavo, María Pe Pereira, Beatriz Sanz Merino, Jaime Vinuesa del Río.

Primera sessió. 11 de Desembre de 1998, de 16 h a 20 h.

35C1. Determineu les possibles àrees dels tetràedres que tenen tres arestes de 2 metres i tres arestes de 3 metres.

35C2. Disposicions regulars com les de la figura:



contenen, respectivament, 22, 24 i 49 llumins. Algunes disposicions, com la de 24 llumins, són quadrades. A més, amb 22 llumins es poden fer dues disposicions diferents, amb 24 només una i amb 5 llumins no se'n pot fer cap.

a) Doneu una condició per a n per tal que, donats n llumins, sigui possible fer alguna disposició rectangular com les de la figura.

b) Doneu una condició per a n per tal que, donats n llumins, sigui possible fer una disposició quadrada.

c) Doneu una condició per a n per tal que, donats n llumins, sigui possible fer només una única disposició.

35C3. Un bidó cilíndric, amb massa en buit M , conté una massa m_0 d'oli quan és ple. El centre de masses (o de gravetat, o baricentre) del bidó ple és en el punt mitjà de l'altura. En començar a buidar el bidó el centre de masses baixa. Però, quan el bidó és buit, torna a ser en el punt mitjà.

Quina massa d'oli hi ha al bidó quan el centre de masses és en el punt més baix?

35C4. Ens interessem per les parelles de funcions f, g que compleixen:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x).$$

a) trobeu totes aquestes parelles en el cas $f = g$.

b) Trobeu totes les funcions g quan $f(x) = x^n$, amb n enter positiu.

35C5. Demostreu que el nombre de cares d'un políedre convex que tenen un nombre senar de costats és parell.

Demostreu també que la suma dels angles de totes les cares d'un políedre convex és $n \cdot 360^\circ$, amb n enter.

35C6. Proveu que si tenim 1998 punts en el pla de manera que no n'hi hagi tres d'alineats, aleshores hi ha 666 triangles disjunts que els tenen com a vèrtexs.

35C7. Determineu les longituds dels costats de tots els triangles rectangles amb costats de longitud entera, als quals es pot inscriure un cercle de radi 6.

35C8. Trobeu tots els nombres enters iguals a la suma dels quadrats de les seves xifres.

Guanyadors: Edgar González Pellicer, Joaquim Molera Vidal, Dario Mora Portela, Marc Vinyes Raso, Pere Menal Ferrer, Óscar Barenys García, Fèlix Llopart Miquel, Domènec Martín García.

Primera sessió. 12 de Març de 1999, de 16 a 20 hores.

35E1. Les rectes t i t' tangents a la paràbola d'equació $y = x^2$ als punts A i B es tallen en el punt C . La mitjana del triangle ABC corresponent al vèrtex C té longitud m . Determineu l'àrea del triangle ABC en funció de m .

35E2. Demostreu que existeix una successió d'enters positius $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ tal que

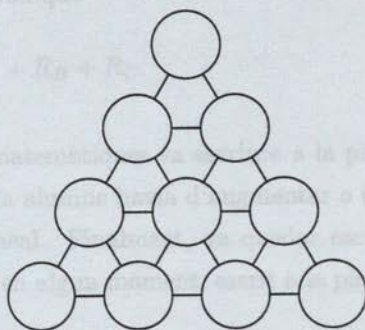
$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$$

és un quadrat perfecte per a tot enter positiu n .

35E3. Sobre un tauler en forma de triangle equilàter amb n files (tal com s'indica a la figura), es juga un solitari.

Sobre cada casella es col·loca una fitxa. Cada fitxa és blanca per un costat i negra per l'altre. Inicialment, només una fitxa, que està situada en un vèrtex, té la cara negra cap amunt; les altres fitxes tenen la cara blanca cap amunt. En cada moviment del joc es retira només una fitxa negra del tauler i es fa la volta a cada una de les fitxes que ocupen una casella veïna. (Caselles veïnes són les que estan unides per un segment.)

És possible treure totes les fitxes del tauler, després d'un cert nombre de moviments?



35E4. Una caixa conté 900 targetes numerades del 100 al 999. Es treuen targetes a l'atzar (sense reposició) de la caixa i s'anota la suma dels dígit de cada targeta extreta. Quina és la menor quantitat de targetes que s'han de treure, per tal de garantir que al menys tres de les sumes siguin iguals?

35E5. El baricentre del triangle ABC és G . Denotem per g_a , g_b , g_c les distàncies des de G als costats a , b , c , respectivament. Sigui r el radi de la circumferència inscrita.

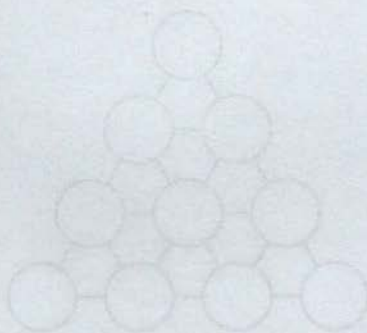
a) Demostreu que

$$g_a \geq \frac{2r}{3}, \quad g_b \geq \frac{2r}{3}, \quad g_c \geq \frac{2r}{3}.$$

b) Demostreu que

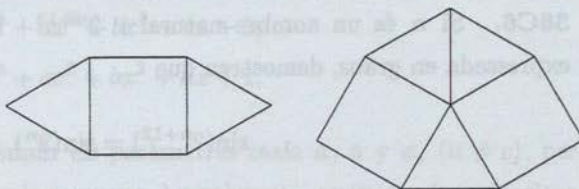
$$\frac{g_a + g_b + g_c}{r} \geq 3.$$

35E6. Es divideix el pla en un nombre finit de regions n per mitjà de tres famílies de rectes paral·leles. No hi ha tres rectes que passin pel mateix punt. ¿Quin és el mínim nombre de rectes necessàries per tal que $n > 1999$?



Primera sessió. 10 de Desembre de 1998, de 16 h a 20 h.

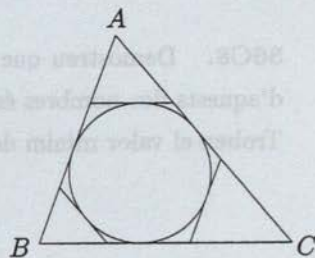
36C1. Amb quadrats i triangles equilàters de costat unitat es poden construir polígons convexos. Per exemple, es poden unir dos triangles i un quadrat per a formar un hexàgon, i tres triangles i dos quadrats per a formar un heptàgon, com es mostra al dibuix (la regió tancada pel polígon ha d'estar recoberta exactament pels quadrats i triangles utilitzats).



Quin és el nombre màxim de costats d'un polígon convex que es pot construir amb aquest mètode?

36C2. En un triangle ABC , el radi de la circumferència circumscrita és R . Es tracen tres rectes tangents a la circumferència inscrita i paral·leles als costats, que formen tres triangles més petits en els vèrtexs del triangle, com es veu a la figura. Si els radis de les circumferències circumscrites als tres triangles petits són R_A , R_B , R_C , demostreu que

$$R = R_A + R_B + R_C.$$



36C3. Un professor de matemàtiques va escriure a la pissarra el polinomi quadràtic $x^2 + 10x + 20$. Llavors cada alumne havia d'augmentar o disminuir en 1, o bé el terme constant, o bé el terme lineal. Finalment, va quedar escrit a la pissarra el polinomi $x^2 + 20x + 10$. Hi va haver en algun moment, escrit a la pissarra, un polinomi quadràtic amb zeros enters?

36C4. Tenim una calculadora que no funciona gaire bé. Només funcionen les tecles: $+$ (suma), $-$ (resta), $1/x$ (invers). Com podem calcular el producte de dos nombres reals amb aquesta calculadora?

36C5. Un tetràedre complex que, per a cada vèrtex, la suma dels cosinus dels angles díedres de les tres arestes adjacents és 1. Demostreu que els díedres d'arestes oposades són iguals.

36C6. Si n és un nombre natural i 2^{n+12} i 2^n denoten la mesura d'un angle expressada en graus, demostreu que

$$\sin(2^{n+12}) = \sin(2^n) \text{ si } n \geq 3.$$

Trobeu també el valor més petit de n per al qual l'expressió $\sin(2^n)$ pren el valor més gran possible.

36C7. En el pla tenim n rectes de les quals no n'hi ha tres que passin per un mateix punt. Aquestes rectes es tallen en 1999 punts.

- a) Determineu el valor màxim i mínim de n .
- b) Determineu els valors de n més grans que 500.

36C8. Demostreu que si el producte de dos nombres positius és constant, la suma d'aquests dos nombres és mínima quan els nombres són iguals.

Trobeu el valor mínim de la funció

$$f(x) = \frac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x}$$

a l'interval $0 < x < \pi$.

Primera sessió. 30 de Març de 2000.

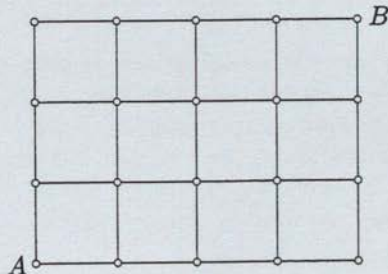
36E1. Siguin els polinomis:

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1;$$

$$Q(x) = x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1.$$

Trobeu les condicions que han de complir els paràmetres reals a , b y c , ($a \neq c$), per tal que $P(x)$ y $Q(x)$ tinguin dues arrels comunes, i resolcu en aquest cas les equacions $P(x) = 0$; $Q(x) = 0$.

36E2. La figura mostra un planol amb carrers que delimiten 12 illes quadrades. Una persona P va des de A fins a B y una altra Q des de B fins a A . Totes dues surten a la vegada seguint camins de longitud mínima amb la mateixa velocitat constant. A cada punt amb dues possibles direccions a seguir, totes dues tenen la mateixa probabilitat. Trobeu la probabilitat que P i Q es creuin.



36E3. Dues circumferències C_1 i C_2 de radis r_1 i r_2 es tallen en els punts A i B . Per B es traça una recta variable que talla altra vegada C_1 i C_2 en dos punts que designarem per P_r i Q_r , respectivament.

Demostreu la següent propietat: Existeix un punt M , que depèn només de C_1 i C_2 , tal que la mediatriu del segment P_rQ_r passa per M .

36E4. Trobeu l'enter més gran N que compleixi les condicions següents:

a) $E(N/3)$ té les tres xifres iguals.

b) $E(N/3)$ és suma de nombres naturals consecutius a partir de 1, és a dir, existeix un natural n tal que

$$E(N/3) = 1 + 2 + 3 + \dots + n.$$

Nota: $E(x)$ és la part entera de x .

36E5. Considerem quatre punts situats a l'interior o la frontera d'un quadrat de costat

1. Demostreu que al menys dos d'ells estan a una distància menor o igual que 1.

36E6. Demostreu que no existeix cap funció $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que compleixi

$$f(f(n)) = n + 1.$$

